CALCULUL ERORILOR. NOȚIUNI SUMARE

1. Generalități

Legile fizicii, care sunt expresia unor fenomene fizice, reprezintă nişte relații între anumite variabile care se numesc mărimi fizice. Relațiile fizice exprimate sub forma unor ecuații matematice se stabilesc în majoritatea cazurilor prin generalizarea datelor experimentale.

A măsura o mărime fizică, înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeaşi natură aleasă în mod convențional ca unitate (etalon) şi a stabili de câte ori unitatea este cuprinsă în mărimea dată. Rezultatul oricărei măsurători se dă sub forma unui produs de doi factori, valoarea numerică şi etalonul de măsură. Măsurătorile pot fi *directe*, când valoarea mărimii căutate se obține ca rezultat al unei observații simple (măsurători) şi *indirecte sau determinări*, când valoarea căutată se obține printr-un calcul pe baza relației fizice între mărimea căutată şi mărimile care se măsoară direct. Sensibilitatea limitată a aparatelor de măsură, defectele lor de construcție, imperfecțiunea metodelor de măsură, a simțurilor noastre şi eventualele perturbații exterioare, nu permit cunoaşterea valorii reale a mărimii de măsurat. În consecință, orice măsurătoare este afectată de erori de măsurare. Acestea, după caracterul lor, se pot împărți în *erori sistematice* şi *erori întâmplătoare* sau accidentale.

Erorile sistematice pot proveni dintr-o imprecizie a metodei de lucru, dintr-un defect al aparatelor de măsură implicate, din cauza unor perturbații exterioare sau dintr-o omisiune a experimentatorului. *Eroarea sistematică* (Δ_S) a unei valori măsurate sau a valorii medii este considerată ca partea din eroarea ce afectează valoarea respectivă datorită uneia sau mai multor erori sistematice. Această eroare poate fi compensată prin corecții. Corecția (C) este egală şi de semn contrar cu eroarea sistematică:

$$C = -\Delta_S. \tag{1}$$

Erorile întâmplătoare sunt acele erori care pot să apară datorită unor cauze aleatoare precum: fluctuațiile accidentale ale influenței mediului ambiant sau ale aparatelor de măsură, fluctuațiile de atenție ale experimentatorului, etc. Nefiind controlabile, erorile întâmplătoare nu pot fi compensate prin corecții. Dacă numărul măsurătorilor este suficient de mare, erorile întâmplătoare se supun unor legi de probabilitate (legi statistice). Două dintre acestea sunt relevante: i) La un număr mare de măsurători, abaterile în plus sunt aproximativ egale cu abaterile în minus, adică abaterile într-un sens, sunt egal probabile cu abaterile în sens contrar. Datorită acestui lucru, media aritmetică a unui mare număr de rezultate este mult mai apropiată de valoarea adevărată decât orice rezultat al unei măsurători individuale. În consecință, o repetare a aceleiaşi măsurători va micşora influența erorilor întâmplătoare. ii) A doua lege se referă la frecvența erorilor. Frecvența relativă a unei erori de măsurare se defineşte prin raportul dintre numărul de cazuri în care aceasta survine şi numărul total de cazuri (măsurători). Frecvența P, a unei erori întâmplătoare de valoare ν, se supune legii normale de distribuție a lui Gauss, exprimată prin formula:

$$P(a) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k(a-\bar{a})^2}, \qquad (2)$$

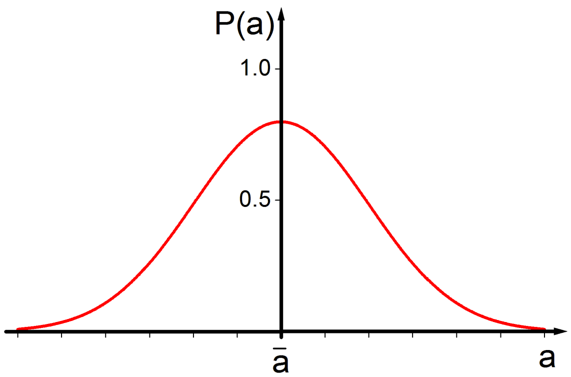

Figura 1

unde e este baza logaritmului natural, iar k este o constantă care depinde de precizia acelui şir de măsurători (sau a metodei). Relația (2) reprezintă ecuația curbei clopot a lui Gauss şi are o exactitate cu atât mai mare cu cât este mai mare numărul de măsurători. Reprezentarea grafică a acestei ecuații, duce la curba de distribuție a erorilor (vezi Fig. 1). Se constată că cea mai mare parte din erori se grupează în jurul valorilor mici, iar cu cât erorile sunt mai mari cu atât frecvența este mai mică. Maximul curbei de distribuție se află la a = $\bar{a}$, valoarea acestuia fiind,

$$P(a = \bar{a}) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564k. \qquad (3)$$

Maximul curbei este important deoarece permite determinarea preciziei metodei (k).

Rezultatul oricărei măsurători sau determinări nu poate fi niciodată perfect, ci este mai mult sau mai puțin apropiat de *valoarea adevărată* (A) a acelei mărimi. Pentru a compensa erorile aleatoare orice măsurătoare trebuie repetată de mai multe ori, obținându-se un şir de valori individuale (a_i), cu ajutorul cărora se calculează *valoarea medie* ($\bar{a}$) a şirului de măsurători. Rezultă că:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}, \qquad (4)$$

unde n este numărul de măsurători.

Se numeşte *eroare absolută* sau *eroare* (Δ_a) a valorii medii măsurate a unei mărimi, diferența dintre valoarea medie măsurată ($\bar{a}$) şi valoarea de referință (A), adică

$$\Delta_a = \bar{a} - A. \qquad (5)$$

Eroarea absolută se măsoară în aceleaşi unități ca şi mărimea respectivă. Dacă A este valoarea exactă a unei cantități şi *a* este o aproximație cunoscută a acesteia, atunci *eroare absolută* a aproximației *a* se consideră de obicei a fi mărimea Δ_a care satisface relația:

$$|a - A| \leq \Delta_a . \tag{6}$$

Pentru scopuri practice este convenabil să se ia pentru (Δ_a) valoarea cea mai mică pentru care este satisfăcută inegalitatea (6). Valoarea adevărată poate fi scrisă atunci

$$A = a \pm \Delta_a . \tag{7}$$

Eroarea relativă (Δ_r) a unei mărimi oarecare, *a* (care poate fi chiar valoarea medie a unei serii de măsurători $a \equiv \overline{a}$), este raportul dintre eroarea absolută Δ_a corespunzătoare mărimii şi valoarea sa absolută |a|, adică:

$$\Delta_r = \frac{\Delta_a}{|a|} \qquad (a \neq 0). \tag{8a}$$

Uneori, eroarea relativă se defineşte ca fiind raportul:

$$\Delta_r = \frac{\Delta_a}{A} , \tag{8b}$$

cu A valoarea exactă, nu întotdeauna cunoscută. Fiind raportul a două mărimi de acelaşi fel, eroarea relativă nu are dimensiuni şi se poate exprima în procente, prin înmulțire cu 100.

2. Calculul erorilor

Majoritatea mărimilor fizice se determină indirect din relațiile fizice aferente, prin măsurarea directă a altor mărimi. Dacă considerăm A, mărimea căutată, aceasta va rezulta dintr-o anumită relație (de obicei dată de o lege fizică) cu mărimile x, y, z,…, care se măsoară direct. Între aceste mărimi există o dependență de forma:

$$A = f(x, y, z, ...). \tag{9}$$

Dacă erorile mărimilor care s-au măsurat direct sunt Δx, Δy, Δz,…., reprezentând erorile probabile şi/sau în unele cazuri imprecizia aparatului, atunci eroarea ΔA, asupra funcției determinate va fi prin definiție:

$$\Delta A = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, ...) - f(x, y, z, ...). \tag{10}$$

Deoarece erorile absolute sunt destul de mici în raport cu mărimile respective, erorile pot fi considerate elemente diferențiale, adică:

$$dA = f(x + dx, y + dy, z + dz, ...) - f(x, y, z, ...). \tag{11}$$

Aplicând formula creşterilor finite, se obține:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz + ..., \qquad (12)$$

sau

$$dA = d[f(x, y, z,....)]\,. \qquad (13)$$

Dacă derivatele parțiale ale funcției A rămân practic constante pe intervalele:

x-Δx	şi	x+Δx
y-Δy	şi	y+Δy
z-Δz	şi	z+Δz

atunci se poate lua limita superioară a erorii rezultante, ΔA, adică:

$$\Delta A = \left|f_x^{'}\right|\Delta x + \left|f_y^{'}\right|\Delta y + \left|f_z^{'}\right|\Delta z + ... \qquad (14)$$

unde, atunci când se face trecerea de la elementele diferențiale la erori, toți factorii diferențiali trebuie să fie luați în valoare absolută.

Cel mai adesea se utilizează erorile relative şi mai puțin erorile absolute. Conform modului de raționament anterior, erorile relative pot fi definite în modul următor:

$$\frac{dA}{A} = \frac{d[f(x, y, z,....)]}{f(x, y, z,....)} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \frac{\Delta x}{f} + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \frac{\Delta y}{f} + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \frac{\Delta z}{f} + ... \qquad (15)$$

De fapt, formula anterioară reprezintă diferențiala logaritmică a expresiei de bază, relația (14), adică:

$$d(\ln A) = d[\ln f(x, y, z,....)] \qquad (16)$$

În practică, pentru a se calcula erorile relative corespunzătoare unei mărimi determinate A(x,y,z,….), se procedează în modul următor: se logaritmează expresia, se diferențiază şi în final se trece la erori. În ultima operație, indiferent de semnul diferențialei, termenii implicați se consideră în valoare absolută.

Pentru o mai bună înțelegere în continuare vom da un exemplu simplu. Vom estima precizia cu care poate fi determinat volumul şi grosimea unui fir de bumbac impregnat cu nanoparticule, în funcție de aparatura avută la dispoziție. Din punct de vedere geometric reprezintă un cilindru, a cărui volum este:

$$V = \pi r^2 h \qquad (17)$$

Eroarea relativă obținută conform relației (16) va fi:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} \qquad (18)$$

Dacă se consideră numărul aproximativ a=3,14, utilizat în locul numărului exact A $=\pi$, atunci, având în vedere că 3,14<π<3,15, rezultă că $|a-\pi| \leq 0{,}01$, deci conform relației (5), pentru eroarea absolută avem valoarea, Δ_a=0,01. Corespunzător, eroarea relativă va fi, Δ_r=0,01/3,14≈0,003. Dacă se doreşte o precizie mai bună, atunci se poate considera a=3,142 şi intervalul 3,14<π<3,142, ceea ce implică o eroare absolută Δ_a=0,002 şi respectiv o eroare relativă, Δ_r=0,002/3,14≈0,0006.

Într-o primă aproximație, valorile pentru diametrul firului, Φ şi lungimea sa, h sunt: Φ = 0,4 mm, h=400mm. Măsurarea diametrului, se poate face cu: un şubler, un micrometru, sau un microscop, în timp ce măsurarea lungimii firului, cu un liniar, şubler, etc. Problema care se pune este evaluarea preciziei necesare, în circumstanțele experimentului efectuat. În acest caz, precizia este dată de precizia instrumentelor de măsură. Masurătorile făcute cu un micrometru şi un liniar, sunt suficient de precise în circumstanța dată. Valorile obținute sunt: Φ=0,4mm±0,01mm sau r=Φ/2=0,2mm±0,01mm şi h=400mm±1mm. Deoarece se determină erori relative, este necesar ca atât numărătorul cât şi numitorul unui termen din formula de calcul a erorii relative să se exprime în aceleaşi unități de măsură. În laborator se utilizează numai Sistemul Internațional cu multiplii şi submultiplii săi, deci vom exprima mărimile măsurate în metri. Rezultă: r=Φ/2=$0{,}2\cdot10^{-3}$m ± 10^{-5}m şi h=0,4 m ± 10^{-3} m. Calculând în primă aproximație relațiile (17) şi (18) se obține:

$$V=\pi r^2 h = 3{,}14\cdot 2^2\cdot 10^{-8}\text{m}^2\cdot 0{,}4\text{m} = 5{,}024\cdot 10^{-8}\text{m}^3$$

şi

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}=\frac{0{,}01}{3{,}14}+2\frac{10^{-5}}{2\cdot10^{-4}}+\frac{10^{-3}}{4\cdot10^{-1}}=0{,}0032+0{,}1+0{,}0025=0{,}0057+0{,}1$$

Exprimând în procente avem:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta\pi}{\pi}+2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}=0{,}32\%+10\%+0{,}25\%=0{,}57\%+10\%$$

Se constată faptul că, luarea în considerare a numai două zecimale pentru numărul π, măsurarea lungimii cu un simplu liniar, introduce erori sub 1%, eroarea cea mai mare fiind dată de precizia măsurării diametrului.

Dacă diametrul se măsoară cu ajutorul unui microscop, cu o precizie de 1μm ($1\cdot10^{-6}$m), atunci termenul

$$2\frac{\Delta r}{r}=2\frac{10^{-6}}{2\cdot10^{-4}}=10^{-2}=0{,}01$$

adică introduce o eroare de 10 ori mai mică, de numai 1%.

În concluzie, în funcție de performanța unor aparate utilizate în procesul de măsurare, se pot obține, precizii mai mari sau mai mici. Dar nu numai acest lucru influențează precizia măsurătorilor ci şi metoda utilizată. Dacă se utilizează metode care implică diferențe de termeni, de exemplu diverse metode calorimetrice, atunci precizia măsurătorilor este mult mai mică, implicând creşterea valorii erorilor relative.

3. Erorile operațiilor elementare

Metoda simplă a diferențialei logaritmice nu se poate utiliza în multe situații practice, atunci când în relația de bază intervin sume sau diferențe, care nu se pot logaritma.

3.1. Eroarea sumei

Eroarea absolută pentru suma a doua sau mai multor mărimi aproximative nu depăşeşte suma erorilor absolute a mărimilor respective. Considerând suma algebrică a unor mărimi aproximative:

$$a = a_1 + a_2 \tag{19}$$

evident

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 \tag{20}$$

Prin urmare, eroarea absolută a sumei, va fi:

$$\Delta_a \leq \Delta_{a1} + \Delta_{a2} \tag{21}$$

Pe lângă eroarea absolută, se poate defini şi *eroarea absolută limită*, exprimată prin relația

$$\Delta^*{}_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} \tag{22}$$

Din această relație, rezultă că eroarea absolută limită nu poate fi mai mică decât eroarea absolută a celui mai puțin termen exact din sumă.

$$\Delta^*{}_a \geq \max(\Delta_{a1}, \Delta_{a2}) \tag{23}$$

În consecință, ceilalți termeni, cu grad de precizie mai mare (cu erori absolute mai mici) nu pot ameliora precizia rezultatului.

Eroarea relativă (limită) a unei sume cu toți termenii de acelaşi semn, nu depăşeşte cea mai mare eroare relativă a termenilor. Considerând mărimile aproximative, a_1 şi a_2 cărora le corespund valorile exacte A_1, şi A_2 notând cu *a* suma mărimilor aproximative şi cu A suma valorilor exacte, eroarea relativă a sumei va îndeplini relația:

$$\begin{aligned} \Delta_r = \frac{\Delta_a}{A} \leq \frac{\Delta_{a1} + \Delta_{a2}}{A} = \frac{A_1\Delta_{r1} + A_2\Delta_{r2}}{A} \\ \leq \frac{A_1 + A_2}{A}\max(\Delta_{r1}, \Delta_{r2}) \end{aligned}, \tag{24}$$

astfel:

$$\Delta_r \leq \max(\Delta_{r1} + \Delta_{r2}), \tag{25}$$

de unde, eroarea relativă limită este:

$$\Delta^*_r = \max(\Delta_{r1} + \Delta_{r2}), \tag{26}$$

3.2. Eroarea diferenței

Vom considera diferența a două numere aproximative, reprezentând două valori a unor mărimi aproximativ măsurate

$$a = a_1 - a_2 . \tag{27}$$

Eroarea absolută limită a diferenței este şi ea egală cu suma erorilor absolute ale celor doi termeni

$$\Delta^*_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} , \tag{28}$$

şi *eroarea relativă limită* a diferenței va fi

$$\Delta^*_r = \frac{\Delta^*_a}{A} = \frac{\Delta_{a1} + \Delta_{a2}}{|A_1 - A_2|} , \tag{29}$$

unde A este valoarea exactă a diferenței

Dacă numerele a_1 şi a_2 sunt foarte apropiate ca valoare, atunci diferența exactă A=a este mică şi, chiar în condițiile în care erorile relative Δ_{r1} şi Δ_{r2} sunt mici, eroarea relativă limită a diferenței, Δ_r^* poate fi foarte mare. Pentru a exemplifica, vom considera numerele aproximative a_1 = 47,132 şi a_2 = 47,111. Fiecare are cinci cifre semnificative exacte, adică o eroare absolută de cel mult 0,0005. Diferența exactă A= 47,132 – 47,111 = 0,021 are doar două cifre semnificative. Eroarea absolută limită a diferenței este:

$$\Delta^*_a = \Delta_{a1} + \Delta_{a2} = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$$

iar erorile relative şi eroarea relativă limită sunt:

$$\Delta_{r1} = \frac{\Delta_{r1}}{|a_1|} = \frac{0{,}0005}{47{,}132} \approx 0{,}00001 \qquad \text{şi} \qquad \Delta_{r2} = \frac{\Delta_{r2}}{|a_2|} = \frac{0{,}0005}{47{,}111} \approx 0{,}00001$$

$$\Delta^*_r = \frac{\Delta^*_a}{A} = \frac{\Delta_{a1} + \Delta_{a2}}{|A_1 - A_2|} = \frac{0{,}001}{0{,}021} \approx 0{,}05$$

Se constată că eroarea relativă limită a diferenței este de aproximativ de 5000 de ori mai mare decât erorile relative ale termenilor. În consecință, este de dorit să se evite metodele de măsură care implică diferența unor mărimi fizice, mai ales dacă diferența este mică.

4. Eroarea aparatelor electrice de măsură

Erorile aparatelor electrice de măsură pot avea o serie de cauze precum: erori datorită insuficientei echilibrări, erori datorită frecării părților mobile, erori datorită fixării incorecte a scalei sau datorită etalonării inexacte, erori datorită înclinării aparatului, erori cauzate de câmpuri perturbatoare electrice sau magnetice interne sau externe, erori de citire (paralaxă), etc.

Cadranele aparatelor de măsură analogice indică clasa de precizie a acestora. Clasa de precizie reprezintă eroarea relativă procentuală admisibilă a aparatului. Prin definiție, clasa de precizie este dată de relația:

$$\gamma = \frac{\Delta A_{max}}{A_n} \quad \text{sau} \quad \gamma\% = \frac{\Delta A_{max}}{A_n} \cdot 100\% \tag{30}$$

unde ΔA_{max} reprezintă eroarea absolută admisibilă a aparatului, iar A_n valoarea nominală a aparatului (valoarea de la sfârşitul scalei), adică limita superioară de măsurare. Între eroarea admisibilă a aparatului şi precizia lui există o relație biunivocă.

Eroarea absolută maximă a aparatului este:

$$\Delta A_{max} = \gamma A_n \,. \tag{31}$$

Eroarea relativă maximă care se poate produce la măsurarea unei mărimi oarecare cu ajutorul unui aparat de măsură este:

$$\Delta_r = \frac{\Delta A_{max}}{A} = \gamma \frac{A_n}{A} \,. \tag{32}$$

unde A este valoarea mărimii măsurate, ceilalți termeni fiind definiți anterior.

Dacă avem la dispoziție un aparat cu mai multe scale, precizia măsurătorilor va fi cu atât mai mare, cu cât vom măsura pe scala cea mai apropiată de valoarea mărimii de măsurat.